Durée : 4 heures

I

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel complexe de dimension n. On notera $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel complexe des endomorphismes de E.

1° Soit N une norme sur E.

a. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\sup_{\substack{X \in E \\ X \neq 0}} \dfrac{N(u(X))}{N(X)}$ est un nombre réel.

b. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\overline{N}(u) = \sup_{\substack{X \in E \\ X \neq 0}} \dfrac{N(u(X))}{N(X)}$.

Montrer que $\overline{N}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

c. Montrer que

$$\overline{N}(u \circ v) \leqslant \overline{N}(u)\ \overline{N}(v) \quad \forall (u,v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E).$$

d. Soit $\mathcal{E} = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ une base de E. On définit la norme N par $N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\right) = \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i|$. Déterminer $\overline{N}(u)$ lorsque u est défini par $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

e. Soit α un automorphisme de E. Montrer que l'on définit une norme sur E par la formule $N'(X) = N(\alpha(X))$. Soit $\overline{N}'$ la norme sur $\mathcal{L}(E)$ associée à N'. Comparer $\overline{N}$ et $\overline{N}'$.

Soient $u \in \mathfrak{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. Montrer que $|\lambda| \leqslant \overline{N}(u)$ quel que soit le choix de la norme N sur E.

En notant $\rho(u)$ le maximum des modules des valeurs propres de u, en déduire que $\rho(u) \leqslant \overline{N}(u)$.

b. On suppose que u est diagonalisable. Montrer l'existence d'une norme N sur E telle que $\rho(u) = \overline{N}(u)$.

Pour tout endomorphisme u de E et tout $\varepsilon > 0$, on admettra l'existence d'une norme N sur E telle que

$$\overline{N}(u) \leqslant \rho(u) + \varepsilon .$$

c. Montrer pour tout $u \in \mathfrak{L}(E)$ l'équivalence des propriétés suivantes :

i. $\rho(u) < 1$.

ii. il existe une norme N sur E telle que $\overline{N}(u) < 1$.

iii. la suite $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathfrak{L}(E)$.

d. Montrer que pour tout $u \in \mathfrak{L}(E)$, et pour toute norme N sur E,

$$\lim_{k \to +\infty} (\overline{N}(u^k))^{1/k} = \rho(u) .$$

On munit canoniquement l'espace $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace vectoriel euclidien (autrement dit, la base canonique est une base orthonormale); $\| X \|$ désigne la norme euclidienne d'un élément X de $\mathbb{R}^n$.

Comme on l'a fait dans la première question on associe à la norme euclidienne une norme sur l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ par la formule

$$|||\, u \,||| = \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^n \\ X \neq 0}} \frac{\| u(X) \|}{\| X \|}$$

On ne récrira pas la démonstration prouvant que l'on définit ainsi une norme.

a. Calculer $|||\, u \,|||$ lorsque u est représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par une matrice diagonale; par une matrice symétrique. Peut-on étendre le raisonnement à tout endomorphisme diagonalisable ?

b. Soit u^* l'adjoint d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$|||\, u \,|||^2 = |||\, u^* \circ u \,|||.$$

c. Calculer la norme de l'endomorphisme représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

II

Dans toute la suite du problème, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique. On identifiera par conséquent un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique.

$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ désignera l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients réels. Une matrice symétrique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sera dite définie positive si elle représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ une forme quadratique définie positive.

La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

1° Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible et que les matrices $A - B$ et ${}^tA + B$ sont symétriques définies positives. On notera $\| X \|_1$ et $\| X \|_2$ les normes respectivement associées à ces deux matrices, c'est-à-dire définies respectivement par

$$\| X \|_1^2 = {}^tX (A - B) X \quad \text{et} \quad \| X \|_2^2 = {}^tX ({}^tA + B) X .$$

a. Montrer que

$$\| A^{-1} B X \|_1^2 = \| X \|_1^2 - \| X - A^{-1} B X \|_2^2 \quad \text{pour tout } X \in \mathbb{R}^n .$$

b. En déduire que

$$\rho(A^{-1} B) < 1$$

2° Étant donnée une matrice $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive dont le coefficient sur la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne est le scalaire c_{ij}, on définit une matrice $A = (a_{ij})$ par les égalités

$$a_{ij} = 0 \text{ si } i < j \quad \text{et} \quad a_{ij} = c_{ij} \text{ si } i \geqslant j$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $j = 1, \ldots, n$, et on pose $B = (b_{ij}) = A - C$. On fixe d'autre part un vecteur $T \in \mathbb{R}^n$.

a. Montrer que A est inversible.

b. On définit la suite Z_k de premier terme Z_0 par la formule de récurrence

$$Z_{k+1} = A^{-1} B Z_k + A^{-1} T.$$

Montrer que la suite Z_k est convergente. On notera Z sa limite.

c. Soit $A' = (a'_{ij})$ la matrice définie par $a'_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $a'_{ii} = c_{ii}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $j = 1, \ldots, n$. Montrer que A' est inversible.

d. Soit $B' = A' - C$. On définit la suite Z'_k de premier terme Z'_0 par la formule de récurrence

$$Z'_{k+1} = A'^{-1} B' Z'_k + A'^{-1} T.$$

Lorsque cette suite admet une limite Z', comparer Z' et Z.

3° Soit $D = (d_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout nombre complexe non nul μ, on définit la matrice $D(\mu) = (d_{ij}(\mu))$ en posant $d_{ij}(\mu) = d_{ij}\,\mu^{i-j}$. Montrer que le déterminant de $D(\mu)$ est indépendant de μ (on pourra utiliser la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \mu & & 0 \\ & \mu^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & \mu^n \end{pmatrix}$$

4° On suppose que la matrice C introduite dans la question 2 est tridiagonale, c'est-à-dire satisfait aux conditions $c_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$. En notant P et P' les polynômes caractéristiques des matrices $A^{-1} B$ et $A'^{-1} B'$ respectivement, déduire de la question 3° que pour tout λ complexe non nul,

$$P(\lambda^2) = \lambda^n P'(\lambda)$$

Comparer alors $\rho(A^{-1} B)$ et $\rho(A'^{-1} B')$. Quelle conclusion peut-on en tirer?

III

On conserve les notations et hypothèses de la question 2° de la deuxième partie.

1° Soit ω un nombre réel. On pose

$$A'' = (1 - \omega) A' + \omega A \text{ et } B'' = (1 - \omega) A' + \omega B.$$

a. Montrer que A'' est inversible pour tout ω réel.

b. On définit la suite Z''_k de premier terme Z''_0 par la formule de récurrence

$$Z''_{k+1} = A''^{-1} B'' Z''_k + A''^{-1} T.$$

Montrer que la suite Z''_k est convergente pour tout $\omega \in]0,2[$. On notera Z'' sa limite.

c. Comparer Z et Z''.

2° On suppose à nouveau que C est tridiagonale et, de plus, que $A'^{-1} B'$ a toutes ses valeurs propres réelles.

a. En notant encore P' le polynôme caractéristique de $A'^{-1} B'$ et P''_ω celui de $A''^{-1} B''$, montrer que, pour $\omega \neq 0$, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$P''_\omega(\lambda^2) = \omega^n \lambda^n P'\left(\frac{\lambda^2 + \omega - 1}{\omega\lambda}\right).$$

b. En déduire qu'à une valeur propre μ de $A'^{-1} B'$ correspondent deux valeurs propres $\lambda_1(\mu, \omega)$ et $\lambda_2(\mu, \omega)$ de $A''^{-1} B''$ qui sont racines de l'équation en λ :

$$(E) \qquad (\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda\, \omega^2\, \mu^2$$

c. On suppose que $0 < |\mu| < 1$. Montrer qu'il existe $\omega_0(\mu) \in]0,2[$ tel que $\lambda_1(\mu, \omega)$ et $\lambda_2(\mu, \omega)$ soient réels pour $\omega \in]0, \omega_0(\mu)]$ et complexes conjugués pour $\omega \in]\omega_0(\mu), 2[$. Dans ce dernier cas, calculer $|\lambda_1(\mu, \omega)| = |\lambda_2(\mu, \omega)|$. Montrer que $\omega_0(\mu)$ est une fonction croissante de μ.

d. On suppose toujours que $0 < |\mu| < 1$. Représenter graphiquement les applications $\omega \longmapsto \lambda_1(\mu, \omega)$ et $\omega \longmapsto \lambda_2(\mu, \omega)$ sur l'intervalle $]0, \omega_0(\mu)]$.

(On pourra s'aider du paramétrage de la courbe d'équation (E) obtenu en posant $\lambda = \omega v + 1$). Soit $\mu_0 \in]0,1[$. Montrer que, pour ω fixé dans $]0, \omega_0(\mu_0)]$, les applications $\mu \longmapsto \lambda_1(\mu, \omega)$ et $\mu \longmapsto \lambda_2(\mu, \omega)$ sont monotones pour $\mu \geqslant \mu_0$.

e. On pose $r = \rho(A'^{-1} B')$ et $\rho(\omega) = \rho(A''^{-1} B'')$. Tracer le graphe de l'application $\rho :]0,2[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\omega \longmapsto \rho(\omega)$. Trouver le minimum de ρ en fonction de r.